Philippe MAUREL
http://phmaurel.fr

SEIS-COMB001-A-06-2010
06 juin 2010

CALCUL SISMIQUE
Non conservatisme du calcul au 'pic' du spectre

Résumé

Dans cette note, on apporte la démonstration du non conservatisme de la méthode approchée dite *'calcul au pic du spectre'* par rapport à la méthode de calcul conventionnelle de calcul modal puis de combinnaison des modes : *'méthode de combinaison SRSS ou CQC'*.

I Introduction

La méthode conventionnelle du calcul de la réponse sismique d'une structure consiste à effectuer une analyse modale (détermination des modes propres de la structure) puis à effectuer la réponse spectrale en utilisant par exemple une combinaison quadratique (SRSS) ou quadratique complète (CQC) des modes propres.

Certains auteurs simplifient l'analyse en effectuant une analyse statique, en appliquant uniformément l'accélération du *pic du spectre* à la structure.

Dans cette note, on apporte la démonstration du non conservatisme de la méthode simplifiée, dite aussi *'pseudo statique au pic du spectre'*.

On utilise pour la démonstration un exemple à 3 degrés de libertés issu de [1]

II Le modèle

On utilise le modèle simplifié suivant (exemple de modèle du type *'brochette'* d'un bâtiment). Ce modèle, encastré à la base comporte 4 noeuds, avec 3 masses et 3 raideurs reliant les masses. Il est représenté ci-aprés.

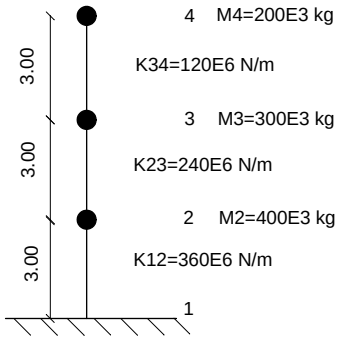

FIGURE 1 –
MODELE

III Calcul des matrices de masse et de raideur

La matrice de masse est définie par :

$$M = \begin{bmatrix} 200E3 & 0 & 0 \\ 0 & 300E3 & 0 \\ 0 & 0 & 400E3 \end{bmatrix}$$

La matrice de raideur est définie par :

$$K = \begin{bmatrix} +120E6 & -120E6 & 0 \\ -120E6 & +360E6 & -240E6 \\ 0 & -240E6 & +600E6 \end{bmatrix}$$

IV Recherche des caractéristiques modales

$$MX^{"} + KX = 0 \tag{1}$$

$$\Rightarrow \parallel K - M\omega^2 \parallel = 0 \tag{2}$$

soit pour la résolution de (2) :

$$\Rightarrow \parallel K - M\omega^2 \parallel = \begin{bmatrix} +120E6 - 200E3\omega^2 & -120E6 & 0 \\ -120E6 & +360E6 - 300e3\omega^2 & -240E6 \\ 0 & -240E6 & +600E6 - 400E3\omega^2 \end{bmatrix}$$

D'où l'on peut calculer les solutions

$$\parallel \omega^2 \parallel = \begin{bmatrix} 210.88 \\ 963.98 \\ 2125.16 \end{bmatrix} \Rightarrow \parallel freq. \parallel = \begin{bmatrix} 2.311 \\ 4.941 \\ 7.337 \end{bmatrix}$$

On notera au passage que ces fréquences se situent dans la zone forte d'un spectre de séisme au niveau du sol. Les vecteurs propres sont notés comme ci-dessous :

$$[\Phi] = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3] \tag{3}$$

soit, tout calcul fait, et en normant les vecteurs propres au plus grand déplacement :

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} +1.0000 & +1.0000 & -0.3944 \\ +0.6485 & -0.6066 & +1.0000 \\ +0.3018 & -0.6780 & -0.9598 \end{bmatrix}$$

On calcule les facteurs de participation par la relation habituelle :

$$[q] = \frac{[\Phi]^T[M][J]}{[\Phi]^T[M][\Phi]} \tag{4}$$

avec, pour le vecteur J (puisque l'on excite tous les DDL) :

$$[J] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On obtient :

$$[q] = \begin{bmatrix} +1.4210 \\ -0.5125 \\ -0.2325 \end{bmatrix}$$

Les masses généralisées sont définies par :

$$[M_i] = [\Phi_i]^T[M][\Phi_i] \tag{5}$$

on obtient :

$$[M_{gen}] = \begin{bmatrix} 362.6E3 \\ 494.8E3 \\ 699.4E3 \end{bmatrix}$$

Les masses modales sont ensuites calculées par la relation

$$m_i = q_i^2 M_i \tag{6}$$

soit :

$$[M_{modales}] = \begin{bmatrix} 732.26E3 \\ 129.95E3 \\ 37.79E3 \end{bmatrix}$$

Total des masse modales :

$$\text{masse}=\sum m_i=900\text{E3}$$

On retrouve bien la masse totale de la structure.

V Réponse spectrale

On utilise le spectre simplifié suivant, considéré à 7% d'amortissement :

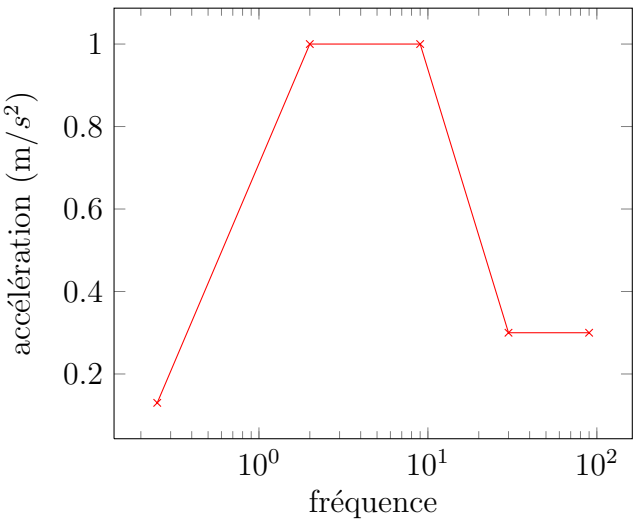

FIGURE 2 –
spectre

Le tableau suivant résume les valeurs de la courbe :

fréquence (Hz)	**accélération (m/s^2)**
0.25	**0.13**
2.00	**1.00**
9.00	**1.00**
30.0	**0.30**
90.0	**0.30**

Ce spectre dont l'amplitude est faible ($1m/s^2$ au pic et $0.3m/s^2$ à l'asymptote), mais il simplifie les calculs par la suite. Il est utilisé pour calculer la réponse spectrale pour une accélération horizontale appliquée au modèle. On remarque que toutes les fréquences calculées précédemment correspondent à des accélérations dans le 'pic' du spectre ($1m/s^2$).

VI Calcul des accélérations aux noeuds (méthode quadratique SRSS)

Le calcul des accélérations modales aux noeuds est obtenu par la relation suivante :

$$\gamma_{ij} = q_i \Phi_{ij} S_{ai} \tag{7}$$

avec :

i numéro du mode
j numéro du noeud
S_{ai} accélération spectrale du mode i

On obtient successivement pour chaque mode les accélération nodales suivantes : Mode 1 :

$$[\Gamma_1] = \begin{bmatrix} \gamma_{14} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1.4210 \\ +0.9215 \\ +0.4288 \end{bmatrix}$$

Mode 2 :

$$[\Gamma_2] = \begin{bmatrix} \gamma_{24} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5125 \\ +0.3109 \\ +0.3475 \end{bmatrix}$$

Mode 3 :

$$[\Gamma_2] = \begin{bmatrix} \gamma_{34} \\ \gamma_{33} \\ \gamma_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0.0917 \\ -0.2325 \\ +0.2231 \end{bmatrix}$$

L'accélération quadratique moyenne (combinaison SRSS) vaut :

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} +1.5133 \\ +0.9999 \\ +0.5991 \end{bmatrix}$$

On voit déjà que l'accélération quadratique moyenne pour le noeud 4 vaut 1.513 et que cette valeur est supérieure à l'accélération du pic du spectre (1.0).

VII Calcul des accélérations aux noeuds (méthode CQC)

Le calcul des accélérations modales aux noeuds est obtenu de la même manière qu'au paragraphe VI. Le calcul de la combinaison des modes s'effectue par les relations suivantes : L'accélération pour un noeud 'i' est obtenue par :

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} q_j \Phi_{ij} S_{aj} q_k \Phi_{ik} S_{ak} \rho_{jk} \tag{8}$$

avec ρ_{ij} le coefficient de corrélation des modes, et ξ l'amortissement, pris uniformément à 7

$$\rho_{jk} = \frac{8\xi^2(1+r_{jk})r_{jk}^{\frac{3}{2}}}{(1-r_{jk}^2)^2 + 4\xi^2 r_{jk}(1+r_{jk})^2} \tag{9}$$

avec :

N nombre de modes de la structure
$\rho_{jj} = 1$
$\rho_{jk} = \rho_{kj}$
$r_{jk} = \frac{f_k}{f_j}$
$S_{aj} et S_{ak}$ les accélérations spectrales pour les modes j et k
f_j et f_k étant les fréquences de la structure pour les modes j et k

La matrice des valeurs des coefficients de corrélation est la suivante :

Mode	**1**	**2**	**3**
1	**1.000**	**0.029**	**0.011**
2	**0.029**	**1.000**	**0.108**
3	**0.011**	**0.108**	**1.000**

On obtient successivement pour chaque mode les accélération nodales identiques à celles du paragraphe VI Aprés quelques calculs avec une feuille de calcul Excel, on obtient les accélérations en combinaison CQC :

$$[\Gamma] = \begin{bmatrix} +1.4978 \\ +0.9988 \\ +0.6187 \end{bmatrix}$$

Ces valeurs sont proches de celles obtenues avec la méthode SRSS, ce qui est normal car les modes sont peu corrélés.

VIII Calcul des efforts sous séisme (méthode SRSS)

On calcule les efforts par la relation classique reliant la masse attachée aux noeuds multipliée par l'accélération quadratique calculée ci-dessus. On calcule également l'effort correspondant au produit de la masse par l'accélération du 'pic' du spectre.

$$F_j = M_j \gamma_j \tag{10}$$

(avec j numéro du noeud)

Le tableau suivant résume les valeurs trouvées :

Noeud	Effort théorique (kN)	effort au 'pic' (kN)
4	**302.6**	**200.0**
3	**298.0**	**300.0**
2	**239.6**	**400.0**

On constate que l'effort l'effort au noeud 4 est supérieur de 51.3% avec le calcul de la réponse spéctrale, par rapport à celui au calcul au 'pic' du spectre. Le tableau suivant donne les efforts tranchants aux noeuds et les rapports entre la valeur obtenue par le calcul spectral (valeur théorique) et la valeur obtenue par le calcul au 'pic' du spectre.

Noeud	Tr. théor.(KN)	Tr. au 'pic' (kN)	ratio th./pic
3	**302.6**	**200.0**	**1.513**
2	**602.6**	**500.0**	**1.205**
1	**842.2**	**900.0**	**0.935**

Le tableau suivant donne les moments fléchissants aux noeuds et les rapports entre la valeur obtenue par le calcul spectral (valeur théorique) et la valeur obtenue par le calcul au 'pic' du spectre.

Noeud	M. théor. (kN.m)	M. au 'pic' (kN.m)	ratio th./pic
3	**907.80**	**600.00**	**1.513**
2	**2715.6**	**2100.0**	**1.293**
1	**5238.6**	**4800.0**	**1.091**

Ces tableaux montrent que la méthode pseudo-statique au 'pic' du spectre sous estime de 51.3 % l'effort tranchant et le moment fléchissant au dernier niveau et 9.1 % le moment fléchissant à l'encastrement.

IX Calcul des efforts sous séisme (méthode CQC)

On ne reprend pas tous les calculs du paragraphe VIII, car on voit que les accélérations calculées au paragraphe VII sont semblables à celle de la méthode SRSS. On peut conclure de la même manière, au vue des accélérations à une sous estimation de 51 % de l'effort tranchant et du moment fléchissant au dernier niveau, et de 9 % du moment fléchissant à l'encastrement.

X Conclusion

On a donc démontré que la justificcation de la résistance des éléments d'une structure à modes multiples, établie sur le principe d'un calcul statique utilisant l'accélération du 'pic' du spectre de réponse n'est pas majorante et peut conduire à une sous estimation des efforts de l'ordre de 50% par rapport à une réponse spectrale par combinaison quadratique simple (SRSS) ou quadratique complète (CQC).

Références

[1] R.W. Clough J. Penzien *Dynamique des structures*. Pluralis, 1980.

≈≈ Ph.maurel Juin 2010 <http://phmaurel.fr> ≈≈